EXERCICE N°1 : 25' 5 points

Soit f définie sur $[0, +\infty[\setminus \{e\}$ par : $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{1 - \ln x} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq e \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1) a) Montrer que f est continue a droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f a droite en 0. Interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to e^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to e^-} f(x)$. Interpréter les résultats.

b) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à ζ_f au voisinage de $(+\infty)$.

c) Etudier la position relative de ζ_f et Δ. **3)** Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Déterminer une équation de la tangente D à ζ_f au point d'abscisse 1.

b) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x \ln x - x + 1$. Etudier le sens de variation de h et en déduire le signe de h(x). Déterminer alors la position relative de ζ_f et D.

5) Construire Δ, D et ζ_f.

EXERCICE N°2 : 25' 5 points

Soit définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2}{x^2 + 1}$.

1) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire qu'il existe un unique nombre réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$.

2) Déduire des questions précédentes le signe de g(x) sur $]0, +\infty[$.

3) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $f'(x) = g(x)$.

4) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. **5)** Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement.

6) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$. Dresser le tableau de variation de f et tracer ζ_f, $(\alpha \approx 0,5)$.

EXERCICE N°3 : 30' 5 points

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 3} + \ln|x - 3|$.

1) a) Etudier les variations de g.

b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet dans $]-\infty, 3[$ une solution unique α et que $\alpha \in]0.7, 0.8[$.

c) Déterminer le signe de g.

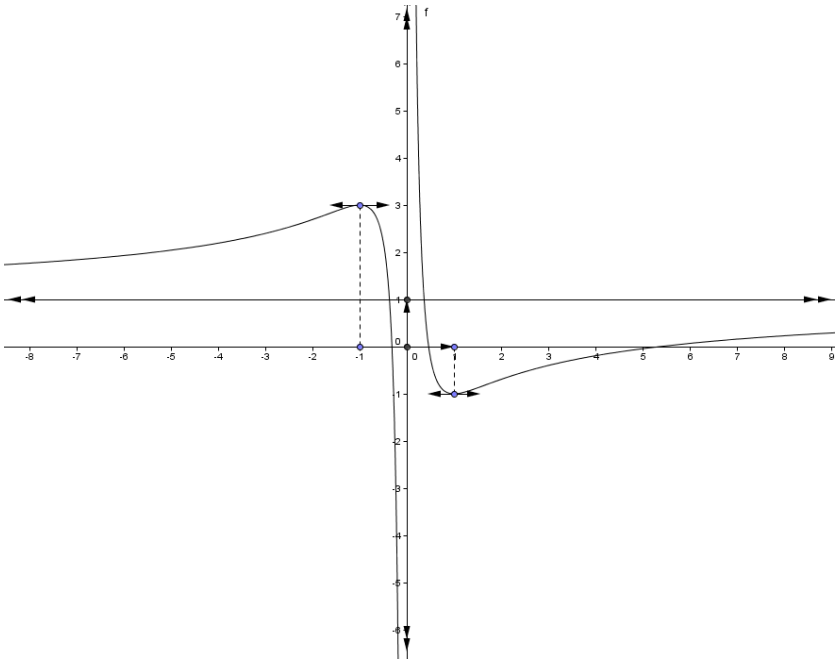
2) Soit f la fonction définie par $f(x) = (x + 1) \ln|x - 3|$. **a)** Etudier les variations de f.

b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C_f et l'axe des abscisses.

c) Vérifier que $f(\alpha) = \dfrac{(\alpha + 1)^2}{3 - \alpha}$ et tracer C_f.

EXERCICE N°4 : 25' 5 points

La courbe ζ_f ci – jointe représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$. Les droites d'équations x = 0 et y = 1 étant des asymptotes à cette courbe.



1) En utilisant le graphique déterminer :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

b) Le tableau de variation de f.

2) On suppose que l'expression de f(x) est de la forme : $f(x) = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c \ln|x|}{x}$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = -\frac{b}{x^2} + c\left(\frac{1 - \ln|x|}{x^2}\right).$$

b) Montrer, en utilisant le graphique que les réels a, b et c vérifient le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -1 \\ -b + c = 0 \end{cases}.$$

c) En déduire alors l'expression de f(x).

EXERCICE N°5 : 35' 6 points

Soit $\alpha \in]1, +\infty[$, on considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = u_n^{2^n}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$. En déduire que $u_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (\alpha - 1)$.

d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 2^n (u_n - 1)$.

a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\dfrac{(1-u_n)^2}{2} \leq \ln(u_n) - u_n + 1 \leq 0$ puis que :

$$-2^{n-1}(1-u_n)^2 \leq \ln(\alpha) + 2^n(1-u_n) \leq 0.$$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\dfrac{1}{2^{n+1}}(\alpha - 1)^2 \leq \ln(\alpha) - v_n \leq 0$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.